Prova scritta di Istituzioni di Analisi
7.2.2013

1.

Sia l^1 (risp. l^2) lo spazio delle successioni reali sommabili (risp. a quadrato sommabile).
i) mostrare che $l^1 \subseteq l^2$;
ii) dimostrare che esiste $x \in l^2 \setminus l^1$;
iii) mostrare che $L^2(0,1) \subseteq L^1(0,1)$;
iv) dimostrare che l'inclusione precedente e' propria.

2.

Sia $X = L^2(-1,1)$ e $F : X \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da
$F(f) = \int_{-1}^0 f(t)dt + \int_0^1 tf(t)dt \ (f \in X)$;
i) dimostrare che F e' lineare e continuo;
ii) determinare $g \in X$ tale che $F(f) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ per ogni $f \in X$;
iii) calcolare la norma di F.

3.

Sia X uno spazio normato nel quale esistano due vettori u e v con $\|u\| = \|v\| = 1$ e
tali che $\| 2u + v \| = 3 = \| u - 2v \|$;
i) dimostrare che u e v sono linearmente indipendenti;
ii) mostrare che esiste una norma su $\mathbb{R}^2$ ed esistono due vettori di $\mathbb{R}^2$ che verificano le uguaglianze precedenti;
iii) detto L il sottospazio di X generato da u e v e definito il funzionale lineare $G : L \to \mathbb{R}$ con $G(u) = G(v) = 1$, dimostrare che G e' continuo e puo' essere esteso con continuita' a tutto X.

Prova scritta di Istituzioni di Analisi
23.10.2012

1.

Si consideri lo spazio $L^2([-\pi, \pi])$ e sia A il sottoinsieme
$A = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\} \cup \{\frac{cosnx}{\sqrt{\pi}}\}_{n=1}^{\infty}$.
i) Mostrare, con un calcolo effettivo, che A e' un sistema ortonormale;
ii) Dimostrare che $\forall f \in L^2$, $lim_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnx dx = 0$;
iii) Mostrare che A non e' completo.

2.

In $\mathbb{R}^k$, $\forall\ 1 \leq p \leq \infty$, se $x = (x_1, ..., x_k)$, sia $\| x \|_p = (\sum_{i=1}^{k} | x_i |^p)^{\frac{1}{p}}$ e
$\| x \|_\infty = max_i | x_i |$.
i) Mostrare che $\| x \|_\infty \leq \| x \|_p \leq k^{\frac{1}{p}} \| x \|_\infty$ $\forall x \in \mathbb{R}^k$;
ii) Mostrare che k e' la piu' piccola costante a tale che
$\| x \|_1 \leq a \| x \|_\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^k$.

3.

Sia H uno spazio di Hilbert e $x, y \in H$.
i) Dimostrare che se $\| x \| = \| y \| = (x, y) = 1$, allora $x = y$;
ii) Siano $\| x \| = \| y \| = 1$ con $x \neq y$; mostrare che $\forall t \in (0, 1)$
$\| tx + (1-t)y \| < 1$.

4.

Sia X uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e sia (u_n) una successione ortonormale.
i) Dimostrare che (u_n) tende debolmente a 0 ;
ii) Utilizzare i) per dimostrare che $B = \{x \in X : \| x \| \leq 1\}$ non e' compatto.

Prova scritta di Istituzioni di Analisi
11.9.12

1.

Sia H uno spazio di Hilbert reale separabile e di dimensione infinita. Sia B la bolla unitaria chiusa di H.
i) dimostrare che B non e' compatta;
ii) per ogni $t \in H$, sia $\varphi_t : H \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi_t(x) = (x,t)$ e sia $\psi : H \to C_\Diamond(B, \mathbb{R})$ definita da $\psi(t) = \varphi_{t|B}$,
dove $C_\Diamond(B, \mathbb{R}) = \{f : B \to \mathbb{R} : sup_{x\in B} \mid f(x) \mid < \infty\}$
Dimostrare che ψ e' lineare e isometrica;
iii) mostrare che $\psi(B)$ e' puntualmente limitato ed equicontinuo;
iv) mostrare che $\psi(B)$ non e' totalmente limitato.

2.

Sia (X, d) uno spazio metrico.
i) dimostrare che X e' separabile se e solo se ha una base numerabile;
ii) dedurne che ogni sottospazio di uno spazio metrico separabile e' separabile.

3.

Sia X uno spazio normato e X^* il suo duale.
i) mostrare che per ogni $f \in X^*$, $\| f \| = 1$, esiste $x \in X$, $\| x \| = 1$ tale che $\frac{1}{2} < \mid f(x) \mid$;
ii) sia $S_1 = \{f \in X^* : \|\mathrm{f}\| = 1\}$ e si supponga X^* separabile. Costruire due successioni $\{x_n\} \subseteq X$ e $\{f_n\} \subseteq S_1$ tali che
a) $\{f_n\}$ sia densa in S_1
b) $\| x_n \| = 1$ e $\frac{1}{2} < \mid f_n(x_n) \mid \forall n$;
iii) dimostrare, per assurdo, che $M = lin\{x_n\}$ e' denso in X (X^*separabile) (suggerimento: utilizzare un corollario del teorema di Hahn-Banach).

4.

i) Osservare che $2^{\mathbb{N}} \subset l^\infty$ e che, se χ_A e' la caratteristica di un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, $\chi_A \in 2^{\mathbb{N}}$;
ii) mostrare che se $A \neq B$ (A, B non vuoti), χ_A e χ_B sono linearmente indipendenti;
iii) mostrare che se $\varphi \in l^1$ e $\varphi_{|2^{\mathbb{N}}} = 0$, allora $\varphi = 0$.

Prova scritta di Istituzioni di Analisi
10/7/2012

Primo modulo:

1.

Sia $X = L^2(-\infty, +\infty)$ e $f_n(x) = x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
i) sapendo che le f_n sono linearmente indipendenti in X e, dette $\varphi_n(x)$ le funzioni ottenute applicando alle f_n il procedimento di ortogonalizzazione, dimostrare che $\forall n \geq 0$ $\varphi_n(x) = P_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$, dove $P_n(x)$ e' un polinomio di grado n;
ii) dimostrare che $P_n(x)$ e' pari se n e' pari e dispari se n e' dispari.

2.

Sia X uno spazio normato e A un sottoinsieme di X tale che se $x, y \in A \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in A$.
i) mostrare che se $x, y \in A \Rightarrow \frac{m}{2^n}x + (1 - \frac{m}{2^n})y \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall 0 \leq m \leq 2^n$;
ii) se A e' aperto e $B(x, r) \cup B(y, r) \subseteq A \Rightarrow B(\frac{x+y}{2}, r) \subseteq A$;
iii) sapendo che i razionali diadici sono densi in $[0, 1]$, dimostrare che se A e' aperto, A e' convesso se e solo se $x, y \in A \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in A$.

3.

Sia $c_0 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}: lim_n f(n) = 0\}$.
i) osservare che $l^1 \subseteq c_0 \subseteq l^\infty$;
ii) dimostrare che $\forall x \in l^1$ si ha $\| x \|_\infty \leq \| x \|_1$;
iii) mostrare che c_0 non e' denso in l^∞.

Primo e secondo modulo:

4.

Sia X uno spazio di Hilbert e $(x_n) \subseteq X$.
i) trovare un esempio di successione che converge debolmente ma non in norma;
ii) trovare un esempio di successione tale che $\| x_n \| \to \| x \|$ senza che vi sia convergenza in norma;
iii) dimostrare che $x_n \to x \iff x_n \rightharpoonup x$ e $\| x_n \| \to \| x \|$.

Prova scritta di Istituzioni di Analisi
12/6/2012

Primo modulo:

1.
Sia $X = L^2(-\infty, +\infty)$
i) mostrare che le funzioni $f_n(x) = x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$, $n = 0, 1, 2, ...$ sono linearmente indipendenti e che se $P(x)$ e' un polinomio, la funzione $P(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ appartiene a X;
ii) calcolare esplicitamente le prime tre funzioni ottenute applicando il procedimento di ortogonalizzazione all' insieme $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$;
iii) calcolare il prodotto scalare (f_n, φ_0) , dove φ_0 e' la prima funzione ottenuta in ii).

2.

i) Mostrare che l'insieme dei numeri razionali della forma $\frac{m}{2^n}$, dove $m, n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq m \leq 2^n$ e' denso in $[0, 1]$;
ii) sia X uno spazio normato e A un sottoinsieme chiuso di X; dimostrare che A e' convesso se e solo se $x, y \in A \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in A$.

3.

Dimostrare che l^∞ non e' separabile.

Primo e secondo modulo:

4.

Sia X uno spazio normato $(X \neq \{0\})$ e X^* il suo duale algebrico
i) dimostrare che X^* e' chiuso in $\mathbb{R}^X$ per la topologia prodotto;
ii) dimostrare che $\mathbb{R}^X$ non e' primo numerabile.